502. 積分方程式ノ近似解法〔I〕

亀田豊治朗（簡易保險局）

第二種ノ積分方程式

$$u(x)=f(x)+\int_a^b K(x,t)\,u(t)\,dt \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (1)$$

ガ實際ニ與ヘラレルトキ，其ノ解 $u(x)$ ヲ近似的ニ計算スル方法ヲ述ベル。

根本ノ考ハ核 $K(x,t)$ ノ代リニ，方程式ガ容易ニ解ケル核 $K_0(x,t)$ ヲトリ且ツ $K_0(x,t)$ ヲ $K(x,t)$ ニ充分近クスルコトニ依ッテ (1) ノ解ヲ算出スルノデアルガ，$K_0(x,t)$ トシテハ例ヘバ x 及ビ t ノ *polynomial* ヲ用キル積分方程式

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K_0(x,t)\,u(t)\,dt$$

ノ解ガ

$$u(x)=f(x)+\int_a^b \frac{D(x,\xi:\lambda)}{D(\lambda)}\,f(\xi)\,d\xi$$

ノ形デ與ヘラレルコトハ周知ノ事實デアルガ，$K(x,t)$ ガ特ニ *Orthogonal functions* $\varphi_i(x)$, $\varphi_j(t)$ ノ *bilinear function*

$$K_0(x,t)=\sum a_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j(t) \qquad \begin{aligned} &i=1,2,\cdots\cdots\cdots n\\ &j=1,2,\cdots\cdots\cdots n\\ &a_{ij}=\text{const.}\end{aligned}$$

デアル場合ニハ，D(x, ξ, λ)モ亦同様ノ形ノ bilinear function デアルコトガ証明出来ル。本論文ノ骨子ハ D(x, ξ, λ) ヲ matrix デ簡単ニ表ハス所ニアル。(定理2参照)

斯クシテ得タ近似解ヲ更ニ精密ニスル方法ハ第三節ニ於テ述ベル。

第一節 bilinear Kernel

$\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots \varphi_n$ ハ區間 (a, b) ニ對シ normal orthogonal function デアルトスル．即チ

$$\int_a^b \varphi_i(t)\varphi_i(t)\,dt = 1$$

$$\int_a^b \varphi_i(t)\varphi_j(t)\,dt = 0 \qquad i \neq j$$

定義 1.　積分方程式ノ核 $K_0(x, t)$ ガ $\varphi_i(x)$, $\varphi_j(t)$ ノ常數ヲ係數トスル bilinear function

$$\sum a_{ij}\,\varphi_i(x)\,\varphi_j(t) \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3, \cdots\cdots n \\ j = 1, 2, 3, \cdots\cdots n \end{pmatrix} \cdots\cdots (2)$$

ニ等シイトキ，$K_0(x, t)$ ハ φ_i ノ bilinear Kernel デアルト云フ。

定義2.　bilinear Kernel ノ matrix トハ其ノ係數カラ作ラレタ次ノモノヲ云フ。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots\cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots\cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots\cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = (a_{ij})$$

$K_0(x,t)$ ガ (2) 式デ表ハサレル場合ニハ積分方程式

$$u(x)=f(x)+\int_a^b K_0(x,t)u(t)\,dt \quad \text{------------} (3)$$

ニ (2) ヲ代入スレバ

$$u(x)=f(x)+\int_a^b \sum_i \sum_j a_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j(t)u(t)\,dt$$

書換フレバ

$$u(x)-f(x)-\sum_i \varphi_i(x)\sum_j a_{ij}\int_a^b \varphi_j(t)u(t)\,dt=0 \quad \text{---------} (4)$$

(4) ノ両辺ニ $\varphi_i(x)$ ヲ乗ジテ積分スレバ

$$\int_a^b \varphi_i(x)u(x)\,dx-\int_a^b \varphi_i(x)f(x)\,dx-\sum_j a_{ij}\int_a^b \varphi_j(t)u(t)\,dt=0 \quad \text{----} (5)$$

$$i=1,2,\text{--------}n$$

(4) 及ビ (5) ノ $n+1$ 式カラ

$$\int_a^b \varphi_i(t)u(t)\,dt=\int_a^b \varphi_i(x)u(x)\,dx$$

ヲ消去スレバ次式ヲ得ル。

$$\begin{vmatrix} u(x)-f(x) & -\sum a_{i1}\varphi_i(x) & -\sum a_{i2}\varphi_i(x) \text{------} \sum a_{in}\varphi_i(x) \\ -\int_a^b \varphi_1(x)f(x)\,dx & 1-a_{11} & -a_{12} \text{------} -a_{1n} \\ -\int_a^b \varphi_2(x)f(x)\,dx & -a_{21} & 1-a_{22} \text{------} -a_{2n} \\ \text{--------} & \text{--------} & \text{--------} \\ -\int_a^b \varphi_n(x)f(x)\,dx & -a_{n1} & -a_{n2} \text{------} 1-a_{nn} \end{vmatrix}=0 \quad \text{--} (6)$$

此ノ式ハ $u(x)$ ノ一次方程式デアッテ，其ノ係數ハ既知ノ函數デアルカラ一般ニ $u(x)$ ハ之レヨリ求メルコトガ出來ル、之ヲ定理デ表ハセバ

定理1. 方程式

$$u(x)=f(x)+\int_a^b\left\{\sum_{ij} a_{ij}\varphi_i(x)\varphi_j(t)\right\}u(t)dt$$

ノ解 $u(x)$ ハ (6) 式ヲ滿足スル。

方程式 (3) ノ解ハ (6) 式ノ $u(x)$ ノ係數ナル行列式

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & 1-a_{nn} \end{vmatrix}$$

ノ値ガ 0 デアルカナイカニ關スルカラ，之レヲ D ト書キ bilinear Kernel (2) ノ determinant ト名付ケル。

行列式 D ノ余因子ヲ A'_{ij} ト書ク。

之ヨリ $D\neq 0$ ノ場合ニ方程式 (3) ノ解ヲ簡明ニ表ハスコトヲ述ベル。

(6) 式ノ第二列，第三列，………第 $n+1$ 列ニ夫々 $-\varphi_1(x)$，$-\varphi_2(x)$，……… $-\varphi_n(x)$ ヲ乘ジテ第一列カラ減ズルト

$$
\begin{vmatrix}
u(x)-f(x)+\sum\limits_i \varphi_i(x)\int_a^b \varphi_i(\xi)f(\xi)\,d\xi & -\varphi_1(x) & -\varphi_2(x) & \cdots\cdots & -\varphi_n(x) \\
-\int_a^b \varphi_1(\xi)f(\xi)\,d\xi & 1-a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\
-\int_a^b \varphi_2(\xi)f(\xi)\,d\xi & -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots\cdots & -a_{2n} \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
-\int_a^b \varphi_n(\xi)f(\xi)\,d\xi & -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots\cdots & 1-a_{nn}
\end{vmatrix} = 0 \qquad (7)
$$

(7) ノ左辺ヲ第一列ト第一行トニ依ッテ展開シ D ニテ除スレバ

$$
u(x)=f(x)-\sum_i \varphi_i(x)\int_a^b \varphi_i(\xi)f(\xi)\,d\xi
$$

$$
+\sum_{i,j}\frac{A'_{ji}}{D}\varphi_i(x)\int_a^b \varphi_j(\xi)f(\xi)\,d\xi
$$

之レヲ定理デ表ハセバ

定理2. 方程式

$$
u(x)=f(x)+\int_a^b \sum_{i,j} a_{ij}\,\varphi_i(x)\varphi_j(t)\,u(t)\,dt
$$

ノ解ハ

$$
u(x)=f(x)-\int_a^b \sum_{i,j} a^*_{ij}\,\varphi_i(x)\varphi_j(\xi)f(\xi)\,d\xi
$$

ノ形デアル、而シテ此ノ式ノ係数ハ

$$
a^*_{ii}=1-\frac{A'_{ii}}{D}
$$

$$
a^*_{ij}=-\frac{A'_{ji}}{D} \qquad\qquad i\neq j
$$

デ計算サレル、但シ A'_{ji} ハ行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & 1-a_{22} & \cdots\cdots & -a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots\cdots & 1-a_{nn} \end{vmatrix}$$

ノ第 j 列第 i 行ノ余因子デアル。

（注意） λヲ含ンダ方程式ニ對シテハ本定理ノ D ニ於ケル a_{ij} ノ代リニ λa_{ij} ト書ケバヨイ。

第二節 *Matrix* 論トノ関係

定理２ハ *matrix* ノ関係式トシテ証明スルコトが出來ル。之レニハ一般ニ二ツノ *bilinear kernel* ト其ノ *matrix* トニ一々對應がアルコトヲ述べネバナラヌ。

$K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$ ヲ同ジ *normal orthogonal function* $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots \varphi_n$ ニ對スル *bilinear kernel* トシ (a_{ij}) 及ビ (b_{ij}) ヲ夫々ノ *matrix* トスレバ $K_1(x,t)+K_2(x,t)$ ノ *matrix* ハ $(a_{ij})+(b_{ij})$ ニ等シイコトハ明カデアル。又 *kernel*

$$\int_a^b K_1(x,\xi)K_2(\xi,t)\,d\xi$$

ニ對スル *matrix* ハ計算シテ判ル通リ $(a_{ij})(b_{ij})$ ニ等シイ。其ノ他 *kernel* ニ常數ヲ乘ズレバ *matrix* モ其ノ常數ヲ乘ゼラレルトカ，分配法則が両者共通ニ妥當デアルトカ種々ノ性質がアル。其ノ内三ツヲ定理デ表ハセバ

定理３．$K_1(x,t)$, $K_2(x,t)$ ヲ同ジ *normal orthogonal function* ニ對スル *bilinear kernel* トシ (a_{ij}), (b_{ij}) ヲ夫々ノ matrix トスレバ

$$\int_a^b K_1(x,\xi)K_2(\xi,t)d\xi$$ ノ matrix ハ $(a_{ij})(b_{ij})$

ニ等シク，

$K_1(x,t)+K_2(x,t)$ ノ matrix ハ $(a_{ij})+(b_{ij})$

ニ等シイ。

定理４．$E(x,t)=\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(x)\varphi_i(t)$ ナル kernel ハ

unit matrix ニ對應シ

$$\int_a^b E(x,\xi)K(\xi,t)d\xi=\int_a^b K_0(x,\xi)E(\xi,t)dt$$
$$=K_0(x,t)$$

デアル。

以上ノ定理ヲ用ヰテ定理２ノ別証ヲ述ベル。

先ヅ matrix $(\overset{*}{a}_{ij})$, (a_{ij}) ノ積ヲ計算スル。(E) ヲ unit matrix トシ，a'_{ij} ヲ行列式 D ノ原素トスレバ

$$(\overset{*}{a}_{ij})=(E)-\frac{1}{D}(A'_{ji})$$

$$(a_{kl})=(E)-(a'_{kl})$$

故ニ

$$(\overset{*}{a}_{ij})(a_{kl})=\left((E)-\frac{1}{D}(A'_{ji})\right)\left((E)-(a'_{kl})\right)$$
$$=(E)-(a'_{kl})-\frac{1}{D}(A'_{ji})+\frac{1}{D}(A'_{ji})(a'_{kl})$$

然ルニ (A'_{ji}) ニ於ケル第 i 列第 j 行ノ原素ハ A'_{ji} デアツテ (a'_{kl}) ノ第 j 列第 i 行ノ原素ノ余因子ニ等シイカラ matrix $(A'_{ji})(a_{kl})$ ハ對角線ダケニ D ヲ殘シテ他ハ 0 トナル。

故ニ

$$(a^*_{ij})(a_{kl}) = (E) - (a'_{kl}) - \frac{1}{D}(A'_{ji}) + (E)$$
$$= (a_{kl}) + (a^*_{ij}) \quad \text{------------------}(8)$$

今 (a_{ij}) 及ビ (a'_{ij}) ヲ matrix トスル核ヲ夫々 $K_0(x,t)$, $K_0^*(x,t)$ トスレバ定理(3)ニ依リ(8)式ハ

$$\int_a^b K_0^*(x,\xi)K_0(\xi,t)d\xi = K_0(x,t) + K_0^*(x,t) \quad \text{-------}(9)$$

トナル。即チ (a^*_{ij}) ニ對應スル核ハ (a_{ij}) ニ對應スル核ト相反關係ニアル。從ツテ周知ノ如ク定理2ヲ証明シ得ル。

尚 $(a_{k,l})(a^*_{ij})$ ヲ同樣ニ計算スルモ $(a_{k,l}) + (a^*_{ij})$ トナル。

以上デ得タ結果ヲ述ブレバ

定理5. a^*_{ij} ヲ定理2ノ如ク定義シ (a_{ij}) (a^*_{ij}) ニ對應スル bilinear kernel ヲ夫々 $K_0(x,t)$ 及ビ $K^*(x,t)$ トスレバ

$$(a^*_{ij})(a_{ij}) = (a_{ij})(a^*_{ij}) = (a_{ij}) + (a^*_{ij})$$
$$\int_a^b K_0^*(x,\xi)K_0(\xi,t)\,dt = \int_a^b K(x,\xi)K_0^*(\xi,t)\,dt$$
$$= K(x,t) + K^*(x,t)$$

——(ツヾク)——